Kleinst mogelijke lengte tussen lijnen

Op de site “http://www.davdata.nl/kortstezijde.html” is het volgende probleem becommentarieerd. Gegeven zijn twee snijdende lijnen en een punt dat willekeurig binnen hun onderlinge hoek is gelegen. Een lijn door het punt snijdt beide lijnen. Wat is de kleinst mogelijke lengte van dit segment? In *Fig 1* is de situatie geschetst. Het bovenbeen staat onder een hoek β, het onderbeen onder een hoek α. Het punt $\mathcal{P}$ ligt op de horizontale as. De stippellijn tussen de benen moet geminimaliseerd worden. De hoek van de lijn loodrecht hierop is aangegeven met ε.

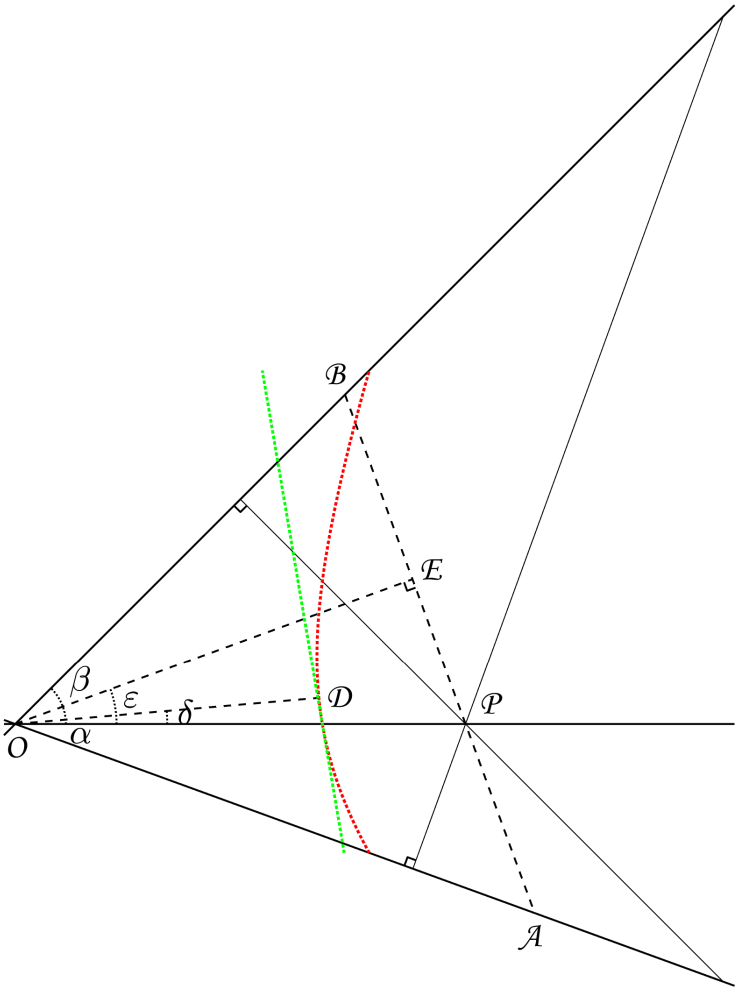

Fig. 1: Mogelijke ligging van het gezochte lijnsegment

Oriëntatie

In genoemd commentaar is aangegeven dat een cirkel met middelpunt op een vaste loodlijn op de horizontale as een bepalende rol speelt. Hierbij hoort een set lijstukken $\mathcal{AB}$. Maar in de gepresenteerde bewijsvoering mag het punt $\mathcal{P}$ dan niet aan de wandel gaan. Daarom onderzoeken we dit eerst.

Beschouw een cirkel met middelpunt p, q die door de oorsprong gaat. Voorts de benen met richtingscoëfficiënten $a = -\tan\alpha$ en $b = \tan\beta$:

$$\left(x-p\right)^2+\left(y-q\right)^2 = p^2+q^2 \qquad y = bx = x\tan\beta \qquad y = ax = -x\tan\alpha \tag{1}$$

We bepalen de snijpunten met de benen:

$$\begin{aligned} &\left(1+b^2\right)x^2-2\left(p+bq\right)x = 0 \qquad x_B = 2\frac{p+bq}{1+b^2} \qquad y_B = 2b\frac{p+bq}{1+b^2} \\ &\left(1+a^2\right)x^2-2\left(p+aq\right)x = 0 \qquad x_A = 2\frac{p+aq}{1+a^2} \qquad y_A = 2a\frac{p+aq}{1+a^2} \end{aligned} \tag{2}$$

De lijn door de snijpunten luidt:

$$y = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\left\{x-\frac{y_B x_A - y_A x_B}{y_B-y_A}\right\} = \frac{bx_B-ax_A}{x_B-x_A}\left\{x-\left(b-a\right)\frac{x_B x_A}{bx_B-ax_A}\right\} \tag{3}$$

Voor punt $\mathcal{P}$ wordt dan gevonden ($y = 0$):

$$x_{\mathcal{P}} = P = (b-a)\frac{x_B\, x_A}{b x_B - a x_A} = \frac{b-a}{\dfrac{b}{x_A} - \dfrac{a}{x_B}} = \frac{2(b-a)}{b\dfrac{1+a^2}{p+aq} - a\dfrac{1+b^2}{p+bq}} \tag{4}$$

Het blijkt dat de waarde van P varieert met de waarde van q voor constante p. Genoemde bewijsvoering heeft dus een tekortkoming.

We onderzoeken hoe het middelpunt beweegt voor constante P. Schrijf de horizontale positie expliciet:

$$2\frac{p}{P} = \frac{b}{b-a}\frac{1+a^2}{1+a\dfrac{q}{p}} - \frac{a}{b-a}\frac{1+b^2}{1+b\dfrac{q}{p}} = \frac{1-ba+(b+a)\dfrac{q}{p}}{\left(1+a\dfrac{q}{p}\right)\left(1+b\dfrac{q}{p}\right)} \tag{5}$$

Dit is de rode stippellijn in *Fig 1*. De groene lijn is de raaklijn op de horizontale as. Deze lijn maakt een (klein) hoekje met de verticaal. Maar hoe klein ook, betekent het toch dat het middelpunt van de kleinste cirkel ietwat van de as af ligt.

Een compactere schrijfwijze wordt verkregen door over te gaan op hoeken. Daartoe introduceren we de hoek δ die de verhouding is tussen q en p:

$$2\frac{p}{P} = \frac{1+\tan\alpha\tan\beta+(\tan\beta-\tan\alpha)\tan\delta}{(1-\tan\alpha\tan\delta)(1+\tan\beta\tan\delta)} = \frac{\cos(\beta-\alpha)\cos\delta+\sin(\beta-\alpha)\sin\delta}{\cos(\alpha+\delta)\cos(\beta-\delta)}\cos\delta \tag{6}$$

Hiermee ligt de afstand van oorsprong naar middelpunt cirkel vast:

$$\frac{2}{\cos\delta}\frac{p}{P} = 2\frac{|\mathcal{OD}|}{P} = \frac{\cos(\beta-\alpha)\cos\delta+\sin(\beta-\alpha)\sin\delta}{\cos(\alpha+\delta)\cos(\beta-\delta)} = \frac{\cos(\beta-\alpha-\delta)}{\cos(\alpha+\delta)\cos(\beta-\delta)} \tag{7}$$

Als deze afstand minimaal is, is de lengte van de koorde $\mathcal{AB}$ ook minimaal. Nu kunnen we een nieuwe hoek ε introduceren:

$$\frac{2}{\cos\delta}\frac{p}{P} = 2\frac{|\mathcal{OD}|}{P} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos(\alpha+\varepsilon)\cos(\beta-\varepsilon)} \qquad \varepsilon = \beta-\alpha-\delta \tag{8}$$

Minimalisatie van *(8)* voert dan tot een corresponderende waarde van ε. In deze hoek kan de lengte van de koorde $\mathcal{AB}$ worden uitgedrukt:

$$\frac{|\mathcal{AB}|}{P} = \cos\varepsilon\left[\tan(\beta-\varepsilon)+\tan(\alpha+\varepsilon)\right] \tag{9}$$

Dit betekent dat de loodlijn op de minimale waarde van $\mathcal{AB}$ onder de hoek ε staat. Het minimum volgt uit het nul worden van de afgeleide:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\frac{|\mathcal{AB}|}{P} = \cos\varepsilon\left[\cos^{-2}(\alpha+\varepsilon)-\cos^{-2}(\beta-\varepsilon)\right]-\sin\varepsilon\left[\tan(\alpha+\varepsilon)+\tan(\beta-\varepsilon)\right] = 0 \tag{10}$$

Dit is identiek aan:

$$\cos\varepsilon\left[\tan^2(\alpha+\varepsilon)-\tan^2(\beta-\varepsilon)\right]-\sin\varepsilon\left[\tan(\alpha+\varepsilon)+\tan(\beta-\varepsilon)\right] = 0 \tag{11}$$

Er blijkt een gemeenschappelijke term te zijn, die niet bijdraagt aan het bestaan van nulpunten. Wegdelen ervan leidt tot:

$$\tan(\alpha+\varepsilon)-\tan(\beta-\varepsilon) = \tan\varepsilon \tag{12}$$

Hierin schrijven we $\tan\varepsilon$ expliciet

$$\frac{\tan\alpha+\tan\varepsilon}{1-\tan\alpha\tan\varepsilon}-\frac{\tan\beta-\tan\varepsilon}{1+\tan\beta\tan\varepsilon} = \tan\varepsilon \tag{13}$$

Voeg de linker termen samen:

$$\frac{\left(\tan\alpha+\tan\varepsilon\right)\left(1+\tan\beta\tan\varepsilon\right)-\left(\tan\beta-\tan\varepsilon\right)\left(1-\tan\alpha\tan\varepsilon\right)}{\left(1-\tan\alpha\tan\varepsilon\right)\left(1+\tan\beta\tan\varepsilon\right)} = \tan\varepsilon \tag{14}$$

Schrijf de teller en noemer uit:

$$\frac{\tan\alpha+2\tan\alpha\tan\beta\tan\varepsilon+2\tan\varepsilon+\tan\beta\tan^2\varepsilon-\tan\beta-\tan\alpha\tan^2\varepsilon}{1-\tan\alpha\tan\varepsilon+\tan\beta\tan\varepsilon-\tan\alpha\tan\beta\tan^2\varepsilon} = \tan\varepsilon \tag{15}$$

De voorwaarde vereenvoudigt tot:

$$\tan\alpha+2\tan\alpha\tan\beta\tan\varepsilon+\tan\varepsilon-\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta\tan^3\varepsilon = 0 \tag{16}$$

Dit is een een kubische vergelijking:

$$\tan^3\varepsilon+\left(2+\cot\alpha\cot\beta\right)\tan\varepsilon+\cot\beta-\cot\alpha = 0 \tag{17}$$

Een kubische vergelijking heeft drie wortels. Als een wortel reëel is en de andere complex, kunnen deze wortels analytisch worden uitgeschreven. Dat is hier het geval. Een prettige bijkomstigheid is het feit dat de kwadratische term ontbreekt. Dat maakt de oplossing veel eenvoudiger.

Volgens Abramowitz en Stegun 3.8.2 geldt er:

$$z^3+a_1z+a_0 = 0 \qquad z = r^{\frac{1}{3}}\left[\left\{1+\sqrt{1+\frac{q^3}{r^2}}\right\}^{\frac{1}{3}}-\left\{\sqrt{1+\frac{q^3}{r^2}}-1\right\}^{\frac{1}{3}}\right] \qquad \begin{aligned} q &= \tfrac{1}{3}a_1 \\ r &= -\tfrac{1}{2}a_0 \end{aligned} \tag{18}$$

In het probleem hier is q positief. Om misverstanden over de rechter derde macht wortel te voorkomen, is het min-teken buiten de accolade haken gehaald. Dit komt in feite neer op $-1 = \exp(3\pi\, i)$

Hiermee wordt gevonden:

$$\tan\varepsilon = r^{\frac{1}{3}}\left[\left\{1+\sqrt{1+\frac{q^3}{r^2}}\right\}^{\frac{1}{3}}-\left\{\sqrt{1+\frac{q^3}{r^2}}-1\right\}^{\frac{1}{3}}\right] \qquad \begin{aligned} q &= \tfrac{1}{3}\left(2+\cot\alpha\cot\beta\right) \\ r &= \tfrac{1}{2}\left(\cot\alpha-\cot\beta\right) \end{aligned} \tag{19}$$

In *Fig 1* zijn de hoeken α en β en het punt $\mathcal{P}$ gekozen. Alle andere grootheden zijn berekend op grond van de hier afgeleide verbanden. Ter controle is voor een uitgebreide collectie koorden de bijbehorende hoek ε bepaald. De hoek die correspondeert met de minimum lengte van de koorde komt overeen met het resultaat *(19)*.